PART3 有理数の指数

要点① 有理数の指数

$a \neq 0$，$b \neq 0$ で，m，n が整数のとき，指数法則

1 $a^m a^n = a^{m+n}$　**2** $(a^m)^n = a^{mn}$　**3** $(ab)^n = a^n b^n$

が成り立つ。ここで，$a > 0$ として，指数法則**2**が，$m = \dfrac{3}{4}$，$n = 4$ のときに成り立つとすると

$$\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^4 = a \qquad = a^3$$

よって，$a^{\frac{3}{4}}$ は a^3 の正の 4 乗根，すなわち　　であるから，$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$ となる。

そこで，指数が有理数である累乗について，次のように定める。

> $a > 0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき
>
> $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$　とくに　$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$，$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

※ $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$ と表される。

例 $81^{\frac{3}{4}} = \qquad = \qquad = (\sqrt[4]{3^4})^3 = 3^3 = 27$

$27^{-\frac{1}{3}} = \qquad = \dfrac{1}{\quad} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{1}{3}$

$\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2^2} =$

指数が有理数である累乗を上記のように定めると，次の指数法則が成り立つ。

> **指数法則（指数が有理数）**
>
> $a>0$，$b>0$ で，r，s が有理数のとき
>
> **1** $a^r a^s = a^{r+s}$　**1’** $a^r \div a^s = \dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
>
> **2** $(a^r)^s = a^{rs}$
>
> **3** $(ab)^r = a^r b^r$　**3’** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

※上記の指数法則は，指数を「実数」の範囲まで広げてもそのまま成り立つ。

[MEMO]

3 (1) 次の値を求めよ。

(i) $8^{\frac{2}{3}}$　　(ii) $9^{-\frac{1}{2}}$

(2) 次の計算をせよ。

(i) $3^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{5}{12}}$　　(ii) $\left(8^{-\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{9}}$

(iii) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[6]{5}$　　(iv) $\sqrt[6]{32} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \div \sqrt[3]{2}$

Point Pickup

有理数を指数とする累乗

$a > 0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{とくに} \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

指数法則（指数が有理数）

$a>0$，$b>0$ で，r，s が有理数のとき

1　$a^r a^s = a^{r+s}$　　**1'**　$a^r \div a^s = \dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

2　$(a^r)^s = a^{rs}$

3　$(ab)^r = a^r b^r$　　**3'**　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

累乗根 $\sqrt[n]{a^m}$ を $a^{\frac{m}{n}}$ の形で表し，指数法則を用いて計算する。

第12講 PART3 確認問題

次の値を求めよ。

1 $16^{\frac{3}{4}}=$ ア

2 $8^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}$

次の計算をせよ。

3 $5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{2}{3}}\div5^{\frac{1}{6}}=$ エ

4 $\left(25^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$

5 $\sqrt[3]{7}\times\sqrt[4]{7}\div\sqrt[12]{7}=\sqrt{\text{キ}}$

6 $\sqrt[6]{81}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}\div\sqrt[12]{9}=$ ク

PART3 有理数の指数

3 (1) 次の値を求めよ。

(i) $8^{\frac{2}{3}}$　　(ii) $9^{-\frac{1}{2}}$

(2) 次の計算をせよ。

(i) $3^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{5}{12}}$　　(ii) $\left(8^{-\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{9}}$

(iii) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[6]{5}$　　(iv) $\sqrt[6]{32} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \div \sqrt[3]{2}$

[解答]

(1) (i) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = (\sqrt[3]{2^3})^2 = 2^2 = 4$

(ii) $9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

(2) (i) $3^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{5}{12}} = 3^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{5}{12}} = 3^{\frac{9+8-5}{12}} = 3^1 = 3$

(ii) $\left(8^{-\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{9}} = 8^{\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{9}} = 8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

(iii) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2+3+1}{6}} = 5^1 = 5$

(iv) $\sqrt[6]{32} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \div \sqrt[3]{2} = (2^5)^{\frac{1}{6}} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5-3-2}{6}} = 2^0 = 1$

第12講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：8

[解説]

$16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}$ [A]

$=(\sqrt[4]{16})^3$

$=(\sqrt[4]{2^4})^3$

$=2^3$

$=8$

[A]　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

2

[正解] イ：1，ウ：2

[解説]

$8^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{8^{\frac{1}{3}}}$ [B]

$=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3}}$

$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

[B]　$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

3

[正解] エ：5

[解説]

$5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{2}{3}}\div5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$ [C]

$=5^{\frac{3+4-1}{6}}$

$=5^1$

$=\mathbf{5}$

[C]　$a^ra^s=a^{r+s}$

$a^r\div a^s=\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

4 [正解] オ：1，カ：5

[解説]

$$\left(25^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=25^{\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}}$$ [D]

$$=25^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(5^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=5^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=5^{-1}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{5}}$$

[D]　$(a^r)^s=a^{rs}$

5 [正解] キ：7

[解説]

$$\sqrt[3]{7}\times\sqrt[4]{7}\div\sqrt[12]{7}=7^{\frac{1}{3}}\times7^{\frac{1}{4}}\times7^{-\frac{1}{12}}$$

$$=7^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}$$ [E]

$$=7^{\frac{4+3-1}{12}}$$

$$=7^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\mathbf{7}}$$

[E]　$a^r a^s=a^{r+s}$

$a^r\div a^s=\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

6 [正解] ク：1

[解説]

$$\sqrt[6]{81}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\div\sqrt[12]{9}=\sqrt[6]{3^4}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\div\sqrt[12]{3^2}$$

$$=3^{\frac{4}{6}}\times3^{-\frac{1}{2}}\div3^{\frac{2}{12}}$$ [F]

$$=3^{\frac{4}{6}}\times3^{-\frac{1}{2}}\times3^{-\frac{2}{12}}$$

$$=3^{\frac{4}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}$$ [G]

$$=3^{\frac{4-3-1}{6}}$$

$$=3^0$$ [H]

$$=\mathbf{1}$$

[F] $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

$\frac{1}{a^r}=a^{-r}$

[G] $a^r a^s=a^{r+s}$

[H] $a\neq0$ のとき，$a^0=1$